



TITLE:

円管内の二球の運動(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

石井, 克哉; 橋本, 英典

CITATION:

石井, 克哉 ...[et al]. 円管内の二球の運動(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 510: 118-131

ISSUE DATE:

1984-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98310>

RIGHT:

円管内の二球の運動

東大理 石井克哉 (Katsuya Ishii)

東大理 橋本英典 (Hidenori Hasimoto)

§ 1. はじめに

円管内を落下あるいは流されて移動する粒子群の運動は、血液の流れ、粉体の輸送等、自然界及び工学上の多くの現象を理解する上で重要である。しかし、粒子と流体との相互作用、壁の影響、粒子同士の相互作用など多くの要因を考慮しなければならぬため、一般的な状況についての理論的取り扱いは困難なものとなっている。今までの研究は、一ないし二種の相互作用を考慮したものであるが、それにもかかわらず、多くの興味深い結果が得られている。たとえば、鉛直に立てられた円管内の流体中を一球が落下する場合、球の受ける抵抗が最小となるのは管軸上を落下する時ではなく、管軸から半径の約 0.4 倍だけ離れた場所を落下する時である。^{2,3)} この場合、流体の慣性力の影響を無視すると粒子の水平方向の移動は起らないが、管壁と慣性力の二つの影響を考慮する

と管軸上を落下するように粒子が横移動することがわかる。^{4,5)}
 また、同一速度で無限領域を運動する二粒子間の相互作用についても詳しい研究がなされている。ここでは、今までの研究に基づいて微小な二球が円管内の粘性流体中を落下する場合の運動について、特に、流体の慣性力の影響による横移動について考える。

§ 2. 円管内を落下する一球の誘導する流れ.

円管内を落下する二球の運動を考える準備として、それぞれの球が周囲に誘起する流れ場を求める。

図1に示すように鉛直に立てられた半径 l の円管内に詰められた粘性流体中を一つ的小球(半径 a) が重力によって落下している時、周囲の流体に誘起する流れを考える。ただし、円管は無限に延びてい、粒子移動に伴う流れ以外の流体の運動はないものとする。粒子の水平方向の移動速度が小さく、

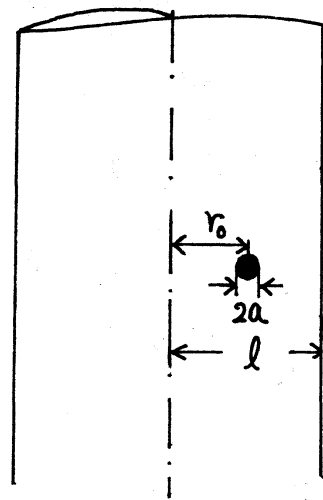


図1

管軸方向の移動速度 U_0 も時間的にほとんど変化しないとするならば、円管が静止している系からみて、粒子と共に管軸に沿って速度 U_0 で平行移動をする座標系

において流体の運動は準定常的なものになる。管軸を z 軸とし、球の中心が $r'_0 = (r'_0, 0, 0)$ となるような円柱座標系 (r, θ, z) を選ぶ。この座標系において流体の基礎方程式は

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}' \cdot \nabla) \mathcal{U}' &= -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta \mathcal{U}', \\ \nabla \cdot \mathcal{U}' &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

境界条件として

$$\mathcal{U}' = U_0 e_z, \quad (r' = l, z' \rightarrow \pm\infty)$$

$$\mathcal{U}' = 0 \quad (|r' - r'_0| = a)$$

(\mathcal{U}' ; 速度, p' ; 圧力, ν ; 動粘性率)

が与えられる。速度 U_0 , 円管の半径 l を用いて無次元化を

$\mathcal{U} = \mathcal{U}' / U_0$, $p = p' l / \rho U_0^2$, ... のように行ない、無次元パラメータ $Re = a U_0 / \nu$, $\kappa = a / l$ を導入すると式(2.1)

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{U} - \nabla p &= \frac{Re}{\kappa} (\mathcal{U} \cdot \nabla) \mathcal{U} \\ \nabla \cdot \mathcal{U} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (B.C.) \quad \mathcal{U} &= e_z & \text{at } r=1 \text{ and as } z \rightarrow \pm\infty \\ \mathcal{U} &= 0 & \text{at } |r - r_0| = \kappa \end{aligned}$$

となる。球の半径が十分小さく、落下速度 U_0 も十分小さい時、 $Re \ll \kappa \ll 1$ と仮定することが出来る。この条件下で円管内の速度-圧力場は式(2.2)の \mathcal{U} , p を Re で展開

することにより求められる¹⁾。速度-圧力場 (u, p) を

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + Re\, u^{(1)} + \dots, \\ p &= p^{(0)} + Re\, p^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

と展開した時、 $(u^{(0)}, p^{(0)})$ はストークス方程式

$$\begin{aligned} \Delta u^{(0)} - \nabla p^{(0)} &= 0 \\ \nabla \cdot u^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (B.C.) \quad u^{(0)} &= e_z \quad \text{at } r=1 \\ u^{(0)} &= 0 \quad \text{at } |r-r_0|=\kappa \end{aligned}$$

の解であり、reflection法により κ の展開形で求めることができる。 $O(\kappa)$ の速度-圧力場 $(u^{(1)}, p^{(1)})$ は球を $u_0^{(1)} = e_z$ による強さ $-6\pi\kappa$ のストークスレットとみなし、

$$\begin{aligned} \Delta v^{(0)} - \nabla \tilde{p}^{(0)} + e_z \delta(r-r_0) &= 0, \\ \nabla \cdot v^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(B.C.) \quad v^{(0)} = 0 \quad \text{at } r=1$$

の解 $(v^{(0)}, \tilde{p}^{(0)})$ により、 $u^{(1)} = -6\pi\kappa v^{(0)}$, $p^{(1)} = -6\pi\kappa \tilde{p}^{(0)}$ と表わせる。 $(v^{(0)}, \tilde{p}^{(0)})$ は

$$\begin{aligned} v_r^{(0)} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum V_r \cos n\theta \sin \lambda z \\ v_\theta^{(0)} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum V_\theta \sin n\theta \sin \lambda z \\ v_z^{(0)} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum V_z \cos n\theta \cos \lambda z \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\left(\Sigma \equiv \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=-\infty}^\infty \right)$$

と θ , z について展開される。ただし,

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial r} g_n + D_n(r) \frac{\partial_\lambda Q_n(r_0)}{2 D_n}, \\ V_\theta &= -\frac{n}{2r} \frac{\partial}{\partial \lambda} g_n + E_n(r) \frac{\partial_\lambda Q_n(r_0)}{2 D_n}, \\ V_z &= g_n - \frac{\lambda}{2} g_n + F_n(r) \frac{\partial_\lambda Q_n(r_0)}{2 D_n}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$g_n = \begin{cases} I_n(\lambda r) K_n(\lambda r_0) & ; r < r_0 \\ K_n(\lambda r) I_n(\lambda r_0) & ; r > r_0 \end{cases} - \frac{K_n(\lambda)}{I_n(\lambda)} I_n(\lambda r_0) I_n(\lambda r),$$

$$D_n(r) = \frac{1}{2} (Q_{n-1}(r) + Q_{n+1}(r)) + Q'_n(r) - \frac{r}{2} (Q'_{n+1}(r) + Q'_{n-1}(r)),$$

$$E_n(r) = \frac{1}{2} ((n-2) Q_{n-1}(r) + (n+2) Q_{n+1}(r)) - \frac{n}{r} Q_n(r),$$

$$F_n(r) = \frac{\lambda r}{2} (Q_{n-1}(r) + Q_{n+1}(r)) - \lambda Q_n(r),$$

$$D_n = D_n(1), \quad Q_n(r) = I_n(\lambda r) / I_n(\lambda),$$

である。

この流れ場

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= e_z - 6\pi\kappa v^{(0)} + O(\kappa^2), \\ p^{(0)} &= -6\pi\kappa \tilde{p}^{(0)} + O(\kappa^2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

により球が流体から受ける力は

$$F^{(0)} = -6\pi\mu a U_0 (1 + k_z \kappa + O(\kappa^2)) e_z, \quad (2.9)$$

となり、 k_z の値は図2のようになる。力 F が球に働く重力とつり合うとすると、 $r_0 \sim 0.40$ の時最大落下速度をもつことがわかる。また、ストークス方程式及び境界条件の対称性より、 $(u^{(0)}, p^{(0)})$ の場が球に与える力は式(2.9)のように z 方向のみであり、球の水平方向の移動を引き起さない。

$O(R_e)$ の流れ場 (u'', p'') は

$$\begin{aligned}\Delta u'' - \nabla p'' &= \frac{1}{\kappa} (u^{(0)} \cdot \nabla) u^{(0)} \\ \nabla \cdot u'' &= 0\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$(B.C.) \quad u'' = 0 \quad \text{at } r=1$$

$$u'' = 0 \quad \text{at } |r-r_0|=\kappa$$

を満たす。速度 - 圧力場 (u'', p'') を κ の展開形で

$$\begin{aligned}u'' &= -6\pi v'' + O(\kappa) \\ p'' &= -6\pi p'' + O(\kappa)\end{aligned}\quad (2.11)$$

とする。初項 (v'', p'') は方程式

$$\begin{aligned}\Delta v'' - \nabla p'' &= \partial_z v^{(0)} \\ \nabla \cdot v'' &= 0\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$B.C. \quad v'' = 0 \quad \text{at } r=1$$

の解であり、特解 $v_s + v_i$ と v の同次解 v_h に

$$v'' = v_s + v_i + v_h$$

$$\begin{cases} \Delta v_s - \nabla p_s = \frac{\partial}{\partial z} u_s, \\ \nabla \cdot v_s = 0, \end{cases} \quad (2.13a)$$

$$(u_s = \frac{1}{8\pi} (\frac{e_z}{R} + \frac{zR}{R^3}), R = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta + z^2)^{1/2})$$

$$\begin{cases} \Delta v_i - \nabla p_i = \frac{\partial}{\partial z} (v^{(0)} - u_s) \\ \nabla \cdot v_i = 0, \end{cases} \quad (2.13b)$$

$$\begin{cases} \Delta v_h - \nabla p_h = 0, \\ \nabla \cdot v_h = 0, \\ B.C. \quad v_h = -v_s - v_i \quad \text{at } r=1, \end{cases} \quad (2.13c)$$

のように分け、求めることができる。特に、 V_s は $\Omega^{(0)}$ 中のストークスレットに対応する $O(Re)$ の解であり、境界ない流体中を落下する粒子が誘導する $O(Re)$ の流れ場

$$\begin{aligned}(V_s)_r &= -\frac{1}{32\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{z^2}{R^3} \right) (r - r_0 \cos \theta) \\(V_s)_\theta &= -\frac{1}{32\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{z^2}{R^3} \right) r_0 \sin \theta \\(V_s)_z &= \frac{1}{32\pi} \left(\frac{z}{R} + \frac{z^3}{R^3} \right)\end{aligned} \quad (2.14)$$

である。 V_i は $\Omega^{(0)} - \Omega_s$ を

$$\Omega^{(0)} - \Omega_s = 2\phi - \text{grad}(\mathbf{x} \cdot \phi - \phi_0)$$

と表わした時の調和関数 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ($\phi_3 \equiv 0$)を用いて

$$\begin{aligned}V_i &= \text{rot rot } A \\(A)_\varphi &= -\frac{z^2}{4} \int^z (\phi)_\varphi dz\end{aligned} \quad (2.15)$$

の形で求まり、

$$V_i = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{V}_i e^{in\theta + i\lambda z}, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}(\tilde{V}_i)_\varphi &= -\frac{1}{4} \partial_\lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial_\lambda Q_n(s_0)}{2D_n} \chi_n(s) \right) - \frac{1}{4} \partial_\lambda \left(\frac{1}{\lambda} \partial_s \hat{\phi}_G \right) \\&\quad + \frac{1}{8} \partial_\lambda^2 \partial_s \hat{\phi}_G + \partial_\lambda \left(\frac{\partial_\lambda Q_n(s_0)}{2D_n} \cdot \frac{Q_{n+1}(s) + Q_{n-1}(s)}{2} \right) \\&\quad - \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\partial_\lambda Q_n(s_0)}{2D_n} \cdot \frac{Q_{n+1}(s) + Q_{n-1}(s)}{2}\end{aligned}$$

$$\text{ただし} \quad \chi_n(s) = \frac{1}{2} \left(\lambda^2 + \frac{n^2}{s^2} \right) (Q_{n+1}(s) + Q_{n-1}(s)) + \frac{n}{2s} (Q'_{n+1}(s) - Q'_{n-1}(s))$$

$$\hat{\phi}_G = \frac{K_n(\lambda)}{I_n(\lambda)} I_n(s_0 \lambda) I_n(s \lambda)$$

などを得られる。この $V_i + V_s$ の $r=1$ での値 $-\delta$ を用いて、ストークス方程式の解 V_k は

$$\mathcal{V}_h = 2\mathcal{X} - \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathcal{X} - \mathcal{X}_0), \quad (2.17)$$

$$\mathcal{X} = (\chi_1, \chi_2, 0), \quad \Delta \mathcal{X} = \Delta \mathcal{X}_0 = 0$$

$$\hat{\chi}_0(r, \lambda; n) = \hat{\chi}_0(1, \lambda; n) Q_n(r)$$

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_r(r, \lambda; n) &= \frac{1}{2} \hat{\chi}_r(1, \lambda; n) (Q_{n+1}(r) + Q_{n-1}(r)) \\ &\quad + \frac{1}{2i} \hat{\chi}_0(1, \lambda; n) (Q_{n-1}(r) - Q_{n+1}(r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_\theta(r, \lambda; n) &= \frac{1}{2i} \hat{\chi}_r(1, \lambda; n) (Q_{n+1}(r) - Q_{n-1}(r)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \hat{\chi}_0(1, \lambda; n) (Q_{n+1}(r) + Q_{n-1}(r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_0(1, \lambda; n) &= \frac{1}{D_n} \left[-\hat{S}_r(\lambda; n) + \frac{i}{4} (Q'_{n-1}(1) - Q'_{n+1}(1)) \hat{S}_\theta(\lambda; n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4\lambda} (4 + (n-2)Q'_{n+1}(1) - (n+2)Q'_{n-1}(1)) \hat{S}_z(\lambda; n) \right] \end{aligned}$$

$$\hat{\chi}_r(1, \lambda; n) = \hat{\chi}_0(1, \lambda; n) + \frac{1}{i\lambda} \hat{S}_z(\lambda; n)$$

$$\hat{\chi}_\theta(1, \lambda; n) = \frac{1}{2} \left[\frac{n}{\lambda} \hat{S}_z(\lambda; n) - \hat{S}_\theta(\lambda; n) \right]$$

(ただし \wedge は $F(r, \theta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \hat{F}(r, \lambda; n) e^{in\theta + i\lambda z}$)
 のような Fourier 変換したものを表わす。

となる。結局、 $(V^{(u)}, p^{(u)})$ は 式(2.6)に対応する形

$$\begin{aligned} V_r^{(u)} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum V_r^{(u)} \cos n\theta \cos \lambda z \\ V_\theta^{(u)} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum V_\theta^{(u)} \sin n\theta \cos \lambda z \\ V_z^{(u)} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum V_z^{(u)} \cos n\theta \sin \lambda z \end{aligned} \quad (2.18)$$

を持ち、 $(V^{(u)}, p^{(u)})$ とは異なる z 方向の依存性を示す。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 (= (r_0, 0, 0))$ において式(2.18)の $V_r^{(u)}$ は零となるが、この $O(\text{Re})$ の流れ場により粒子は管軸方向に移動を行なう。図3にこの管軸方向の速度を示した。

ここまでの結果をまとめると、粒子のつくる流れ場は、

$$u = E_z - 6\pi\kappa v^{(0)} - 6\pi Re v^{(1)} + O(\kappa^2, Re\kappa) \quad (2.19)$$

$$p = -6\pi\kappa p^{(0)} - 6\pi Re p^{(1)} + O(\kappa^2, Re\kappa)$$

と表わすことができる。特に、 $\kappa^2 \ll Re$ [$\ll \kappa \ll 1$]である場合には落下する一粒子の誘導流の最初の二項が求められたこととなる。図4には $v^{(0)}$ の、図5には $v^{(1)}$ の粒子が $r_0 = 0.3$ にある場合の流速ベクトルの射影図を示した。 $v^{(0)}$ は $z=0$ 面の閉曲線を中心とした閉じた流線の集合で表わされ、 $v^{(1)}$ は $z=0$ 面に対称な二組の閉じた流線の集合で表わされることかわかる。

3. 二粒子の運動

N 数の粒子が円管内を落下している時、粒子がそれぞれ十分に離れている ($\sim O(l)$) ならば、それらの誘導する $O(Re)$, $O(\kappa)$ の流れ場は 式(2.19)の重ね合わせで求めることができる。二つの同一球 A ($r_A = (r_A, 0, 0)$), B ($r_B = (r_B, \theta_B, z_B)$) が円管内を落下している場合を考えると、流れは

$$u - E_z = -6\pi\kappa (v_A^{(0)} + v_B^{(0)}) - 6\pi Re (v_A^{(1)} + v_B^{(1)}) + O(\kappa^2, Re\kappa) \quad (3.1)$$

と表わせる。ただし、 $v_A^{(0)}$, $v_B^{(0)}$ は 式(2.6)中の r_0 を r_A , r_B とおいたものであり、 $v_A^{(1)}$, $v_B^{(1)}$ は 式(2.18)中の r_0 を

r_A, r_B としたものである。また、各粒子は $u - e_z$ から自分自身の Stokeslet の特異性を除いた r_A あるいは r_B での流れにより移動する。一般的な状況のもとでの二粒子の運動は複雑なものとなるが、式(2.6)及び図4の流れ場より $O(k)$ では主に二粒子の同じ方向への運動(上流側の球が下流側の球を追うような運動)が引き起され、式(2.19)及び図5の流れより $O(Re)$ では主に相対的な位置を変化させるような運動が起こされる。特に、 $z=0, r_A=r_B (\equiv r_0)$ とした時、つまり同一二球が水平に、管軸から等距離離れて落下する場合、

$$\langle V_A \rangle_z = \langle V_B \rangle_z, \quad \langle V_A \rangle_r = \langle V_B \rangle_r, \quad \langle V_A \rangle_\theta = -\langle V_B \rangle_\theta \quad (3.2)$$

となり、時間的にその状況は変化しない。また、 $z=0$ の面では $(v_A^{(0)} + v_B^{(0)})_r = (v_A^{(0)} + v_B^{(0)})_\theta = 0$ であり、 $O(Re)$ の流れ $v_A^{(1)} + v_B^{(1)}$ によ、この二球の相対位置の変化が決定される。図6に粒子 $B(r_0, \theta_0, 0)$ の速度ベクトルの (r, θ) 成分を B の位置 (r_0, θ_0) を起点として図示した。また、図7には $\theta_0 = 180^\circ$ の $(V_B)_r$ を与えた。これらより、二球は $\theta_0 = 180^\circ, r_0^* = 0.39$ の管軸に対して対称な平衡位置に移動して落下することがわかる。この平衡位置は z 方向への微小攪乱によ、不安定なものとなる $(\langle V_B \rangle_r \approx -0.042 Re(r - r^*), \langle V_B \rangle_z \approx 0.016 Re z; (r_0^*, 0) \text{ 付近})$ が、 r_0^* がストークス近似における z 方向の抵抗最小である位置 0.40 に非常に近いことは興味深い。

(参考文献)

- 1) R. G. Cox and H. Brenner : Chem. Eng. Sci. 23 (1968) 147.
- 2) J. Happel and H. Brenner : "Low Reynolds Number Hydrodynamics"
(Noordhoff, 1973)
- 3) H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Japan 41 (1976) 2143.
- 4) M. Shinahara and H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Japan 46 (1979) 320.
- 5) K. Ishii and H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Japan 48 (1980) 2144.

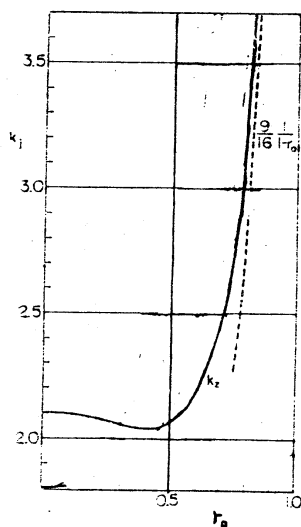


図2. 一球の抵抗
係数^{2,3)}

$$F^{(0)} = 6\pi\mu a U_0 \left(1 + k_z \frac{a}{l}\right)$$

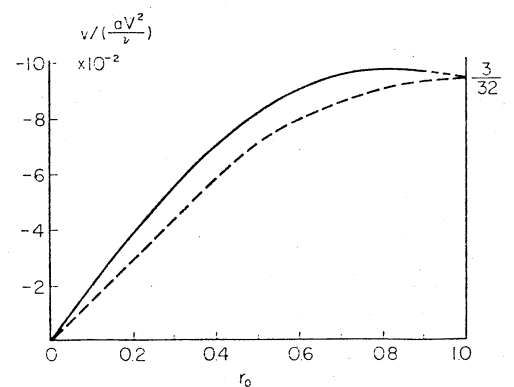
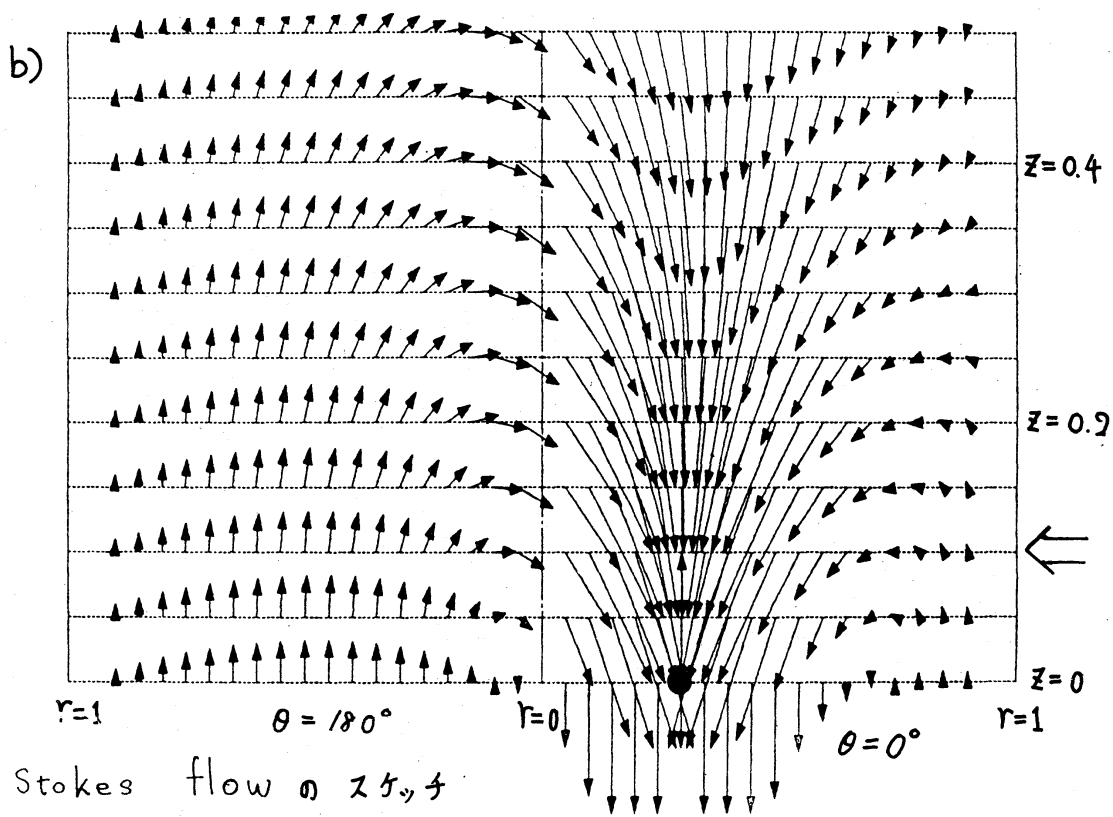
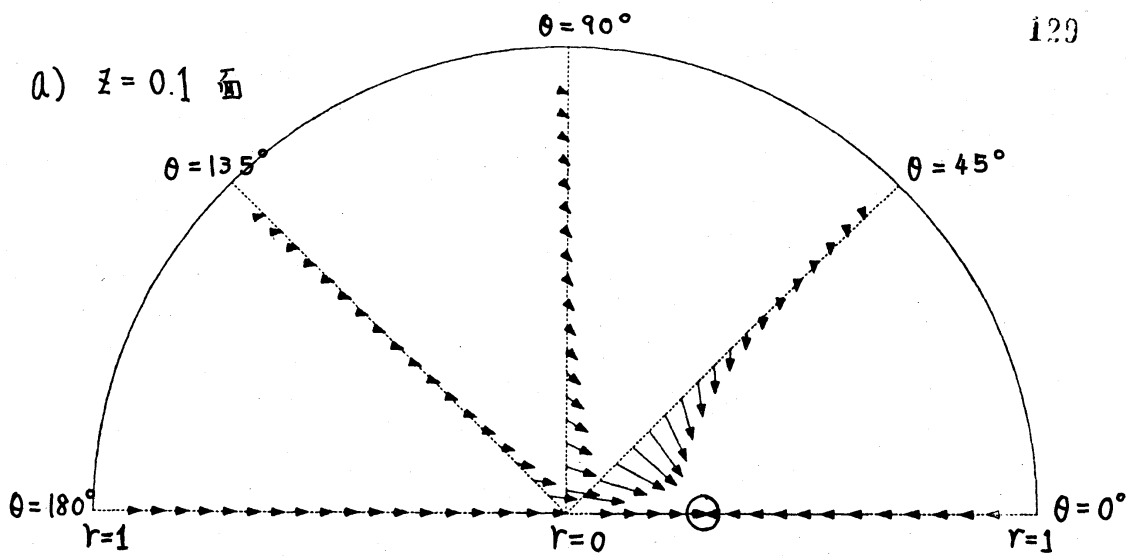


図3. $O(Re)$ の流れによ
る横方向の移動速度^{4,5)}



c) Stokes flow のスケッチ

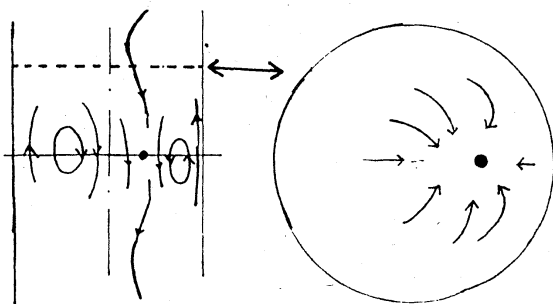
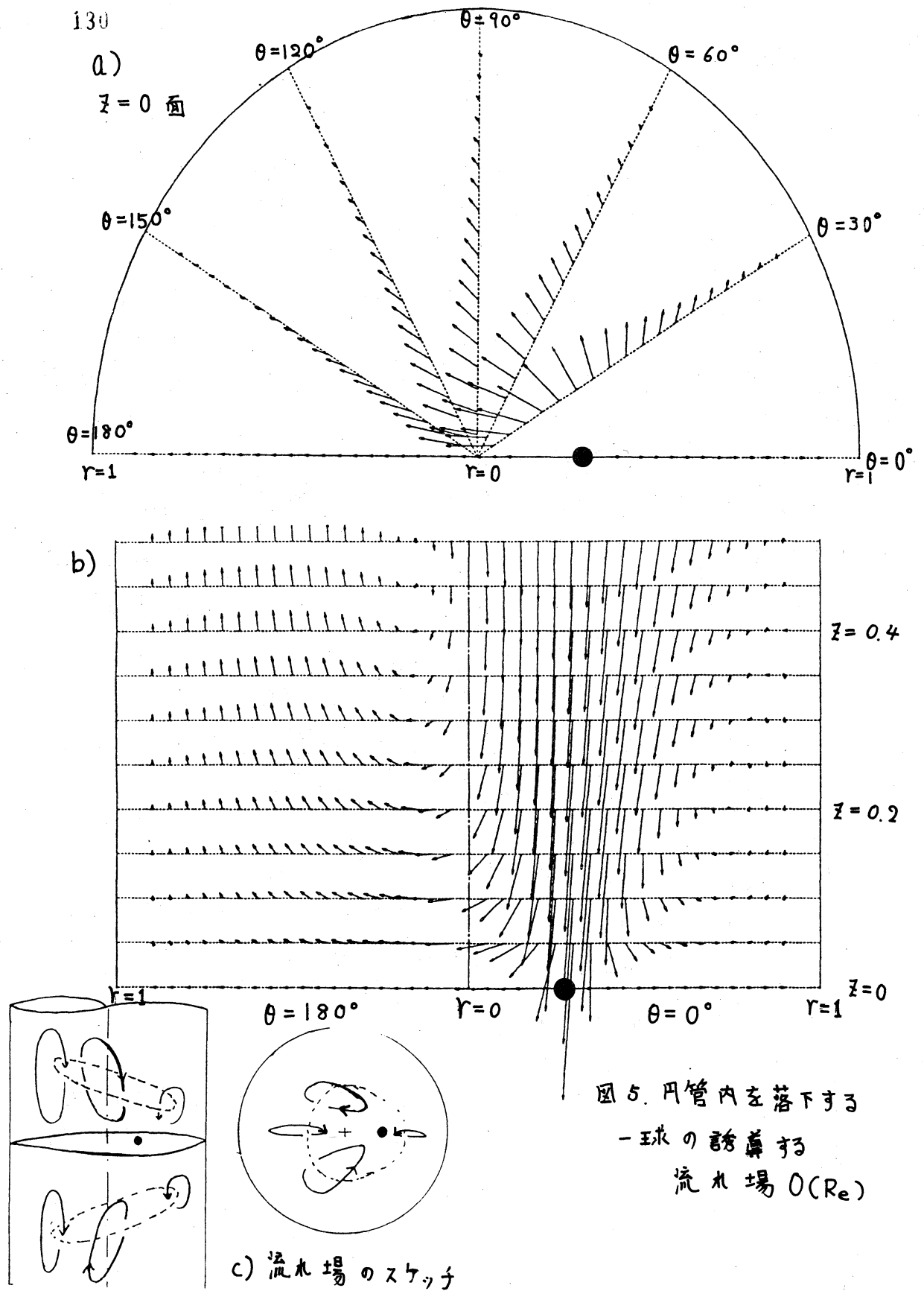
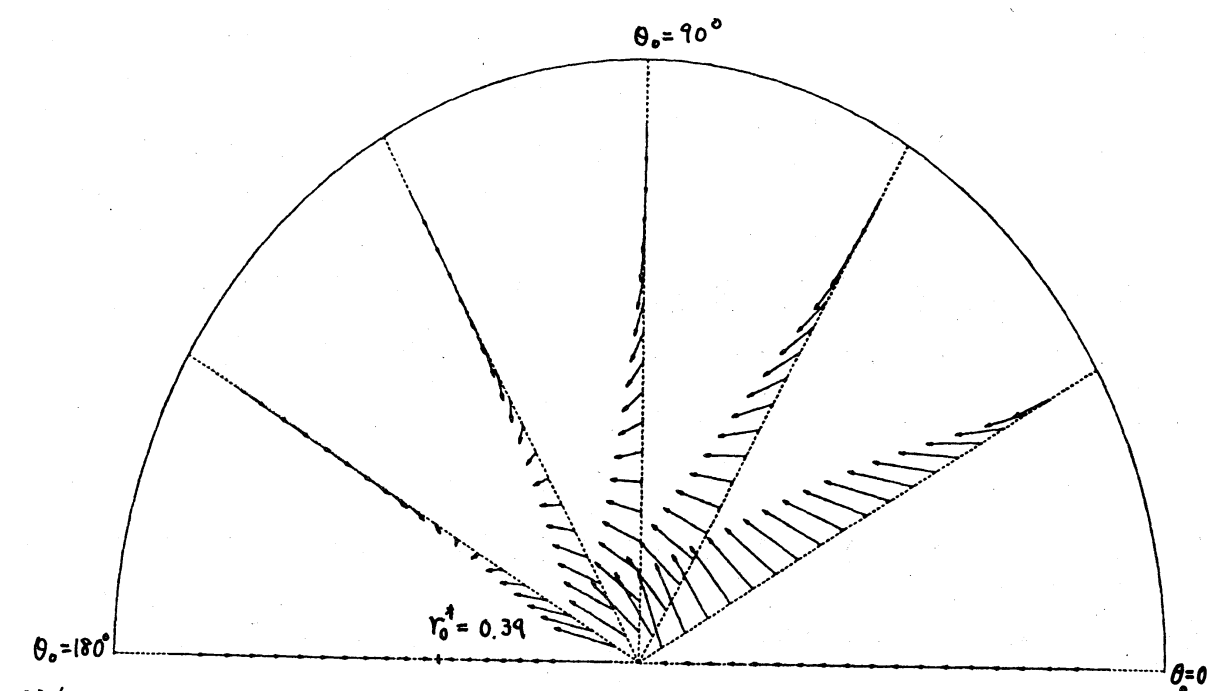


図4.円管内を落下する一球
の誘導する流れ場 $O(k)$





a) 粒子 A が $(r_0, 0)$ にあるときの粒子 B (r_0, θ_0) の横速度

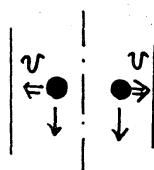
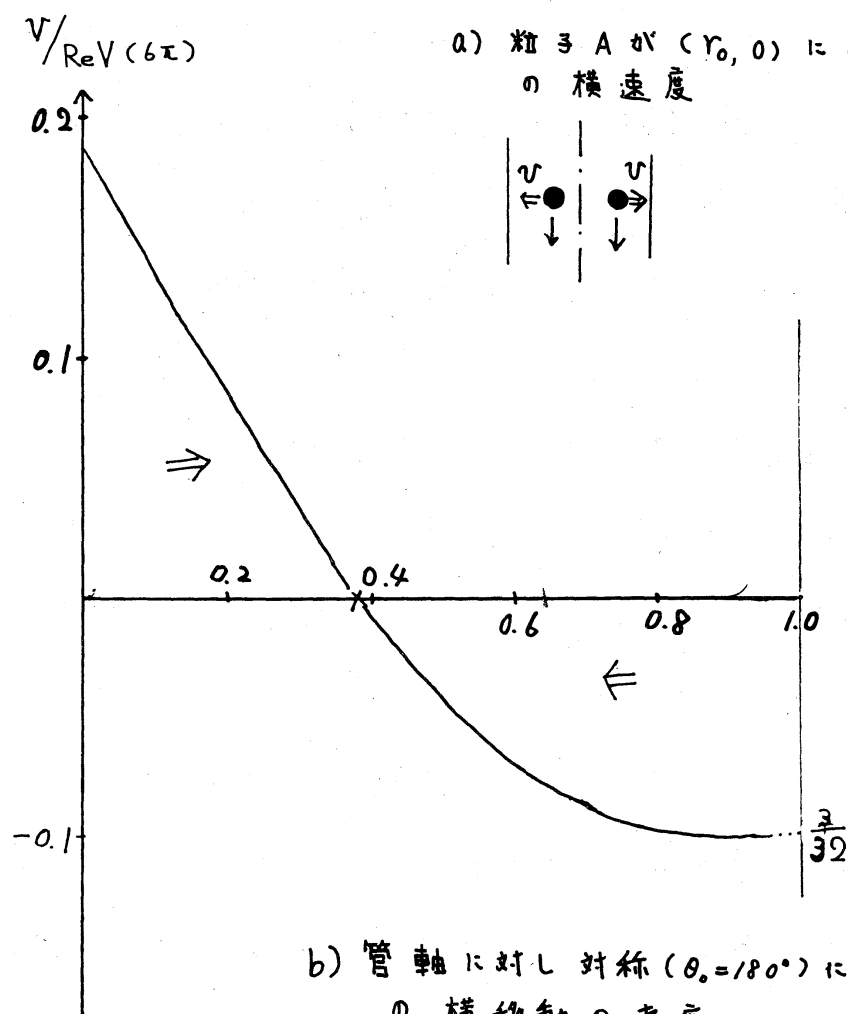


図 6. 水平に、管軸から
等距離離れた二球
の横速度



b) 管軸に対し対称 ($\theta_0 = 180^\circ$) にある球
の横移動の速度